

1. 本時の目的

日常生活とは無縁のように感じがちな数学を、実は身近な生活の中で数学が活用されていることを感じ取ってもらう事で、数学に対して感じている距離感を縮め、これからの数学への興味・関心を持ってもらい学ぶ楽しさを感じる。

数学の問題を解く事で、無意識のうちに論理的思考を身に付ける。

2. 本時のメッセージ

数学に対する距離は難しさ以外に日常で見つけにくい、つまり、実は多くの場面で数学は使われているのだけれど、それに気付きにくい為より非日常的に感じ、親しみにくさもあると思うので、この授業で自ら発見していく事や、数学がいかに社会で活用されているかに気づき、新たな社会、世間もしくは生活の見方をする事で一味違った人生の楽しみ方を感じて欲しい。

3. 本時の指導過程

教室に入り、起立・礼・着席をした後、クラス全体が落ち着いたら授業を始める。

「では、まず先週の復習からしたいと思います。先週は平均変化率について勉強しました。関数 $y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変わる時、 y の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化しますね。」

x	a → b
y	f(a) → f(b)

「一次関数や二次関数のところでも出てきた変化の割合。では、変化の割合は〇〇分の〇〇だったでしょうか。みんな一年生の時の授業や前回の授業を思い出して見よう。では〇〇さん。分母は何だったかな。では分子は何だったかな。」

(予想)

答えられた場合はクラス全体に確認の意味を込めてしっかり復唱する。

分らなかった場合は、まず前回のノートを見るように促す。

$$\text{変化の割合} = \frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leftarrow f(x) \text{の平均変化率}$$

「では、今日は微分係数についてやりたいと思います。早速皆さんに質問ですが、将来車の免許を取りたいと思っている人。」

(予想)

数人が手を挙げる。

「車に乗ってドライブに行くなど、楽しみがたくさんあると思いますが、安全運転の為に気を付けなければならない事は、スピードの出し過ぎですね。皆さんは車のスピードメーターを見た事がありますか。ある人？無い人？」

(予想)

数人が挙がると思うので、どんな形をしていたか、どんな感じになっていたか手を挙げた数人に質問する。たいていは、針があった。数字が書いてある。等の意見が出る。

「では、そのスピードメーターをみれば何が分かるのかな。いったい何を示していると思う。」

(予想)

車のスピード。その時の車の速さ。等の意見が出る。

「アクセルを踏んだらスピードが出るし、少しだけ踏んだらスピードが遅くなるけど、あれってその瞬間の車の速さを示しているよね。では、どうやったらその車のスピードが分かるのか今日は一緒に考えてみましょう。」

「その瞬間、つまり一瞬ってどの位の短さなのか、今日は具体的に車のスピードについて考えてみましょう。例えば、今日は遅刻しそうだったので家から学校まで車で送ってもらうことにしました。車が発車し始めてからの時間 x 秒と進んだ距離 y メートルには $y = 5x^2$ の関係があることが分かっています。」

発車し始めてからの時間 x 秒

進んだ距離 y メートル

x と y の関係 $y = 5x^2$

「まず、動き始めて 2 秒後から 10 秒後の間に進んだ平均の速さを求めてみよう。出発してから 2 秒後は何メートル進んでいますか。〇〇さん。では、10 秒後には何メートル進んでいますか。〇〇さん。」

2 秒後→20 メートル

10 秒後→500 メートル

「速さはどうやったら求まるのだったかな。〇〇さん。」

速さ = 距離 ÷ 時間

「そうですね。みんな『は・じ・き』で覚えた人も多いと思いますが、速さは距離 ÷ 時間で求めることが出来ました。では、2 秒から 10 秒まで何秒間進みましたか。〇〇さん。では、8 秒間の間に何メートル進んでいますか。〇〇さん。」

(予想)

8秒や480メートルと直接答えが出てくるだろうから、どうやって出したのか計算式もしっかり聞く。

$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{進んだ距離}}{\text{かかった時間}} = \frac{500 - 20}{10 - 2} = \frac{480}{8} = 60$$

平均毎秒 60 メートル

「次は進む時間を短くしてみましょう。2秒後から3秒後に進んだ平均の速さについて考えてみましょう。まず2秒から3秒まで何秒間進んでいますか。〇〇さん。では、2秒後には何メートル進んでいますか。〇〇さん。次に3秒後には何メートル進んでいますか。〇〇さん。ということは、この1秒間の間に何メートル進んでいますか。〇〇さん。」

(予想)

答えだけの場合は、計算式もしっかり聞く。

$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{進んだ距離}}{\text{かかった時間}} = \frac{45 - 20}{3 - 2} = \frac{25}{1} = 25$$

「この場合1秒間に25メートル進んでいますね。では、今度はもっと短い時間で考えてみましょう。2秒後から2.1秒、つまり0.1秒間の平均の速さを求めてみましょう。では、友達と相談しても良いので1度考えてみて下さい。」

(予想)

やり方は先ほどの問題で分っているだろうけど、小数が出てきたので計算の仕方が分からないという生徒が居るはずである。だから、先ほどと同様に2秒後と2.1秒後のそれぞれの進んだ距離を求めて、平均の速さを生徒に当てながら黒板で一緒に求める。机間指導で声をかける。

「皆さん考えてみましたか。ではみんなで一緒に考えてみましょう。2秒後には何メートル進んでいますか。〇〇さん。次に2.1秒後には何メートル進んでいますか。〇〇さん。ということは、この0.1秒間の間に何メートル進んでいますか。〇〇さん。」

$$\text{平均の速さ} = \frac{5(2.1^2 - 2^2)}{2.1 - 2} = \frac{5 \times 0.41}{0.1} = 20.5$$

平均の速さ 秒速 20.5 メートル

「いま、0.1秒間の平均の速さは毎秒20.5メートルという事が分かりました。では、ここで皆

さんに考えて欲しいのですが、今日の授業で先生は何の速さについてみんなで考えてみようと言ったか覚えている人はいますか。〇〇さん。」

(予想)

誰も手が挙がらなければさらっと次に進む。

「そうですね。瞬間の速さについて考えようと言いましたね。今、皆さんに平均の速さで車が進んでいる時間を8秒間、1秒間、0.1秒間とだんだん短くして求めてもらいました。ここで少し考えて欲しいにですが、先ほど瞬間の速さについて一瞬は時間が短いという意見がたくさん出ていましたが、今、時間の間隔を短くして0.1秒まで小さくしましたが、この0.1は一瞬だと思えますか。」

(予想)

少なからず求まったという意見も出ると思うが、もっと短いという意見も出ると予想される。もっと短いという意見が出たら、ではどの位短くすれば良いか聞いてみる。

「では皆さん、0.1秒よりもっと短い時間を言ってみましょう。」

(予想)

おそらく0.01や0.001・・・と、どんどん短い、小さい数やもしかしたら0という意見も出るかもしれない。0という意見が出た場合は、他の生徒に0について意見を聞いてみる。0に関して意見が出なかった場合は、教師が0について、0秒では止まってしまっているという事を生徒に発問しながら一緒に考える。

また、0.01や0.001・・・と、どんどん短い時間が出ると予想されるので、きりの良いところで切り上げる。

「どんどん小さい数が意見で出ましたね。と言う事は、とても小さい数で0に近いけど、0では無いという事が言えそうですね。では、瞬間の速さを考えてみましょう。」

「一瞬だから車が進んでいる時間をとても短くしたいよね。でも、0秒だと全く進んでいない事になってしまうから、0ではないけど限りなく0に近づきたい。では、一度車が2秒後からh秒間進んだとしてみましよう。先ほどの演習で2秒後は20メートル進んでいたよね。では、みんな考えてね。2秒後からh秒間進んだという事は家を出発してから、何秒たっているでしょうか。〇〇さん。」

「では、 $(2 + h)$ 秒間で進んだ距離は何メートルですか。〇〇さん。」

「時間と距離には $y = 5x^2$ という関係があったので、 x に $(2 + h)$ を代入して $5(2 + h)^2$ メートルになりますね。では、速さは距離÷時間で求まるので式はどうなりますか。〇〇さん。」

$$\text{速さ} = \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \frac{5(2+h)^2 - 20}{h} = \frac{20h + 5h^2}{h} = 20 + 5h$$

「次に、 h 秒間。一瞬とは 0 に限りなく近いという事が言えるので、この h を限りなく 0 に近づきたいですね。そんな時はどうするかというと、 \lim を使います。前回の授業で極限值という言葉が出てきましたが、 \lim の下に文字 $\rightarrow 0$ と書いてあるのですが、これはこの文字を 0 に限りなく近づけますよ、という事を表わして、その時の値を極限值と言います。」

\lim
文字 $\rightarrow 0$

文字を 0 に近づける

「今、 h を限りなく 0 に近づきたい、そんな時は $h \rightarrow 0$ と \lim の下に書きます。そして、 \lim の右に近づきたい関数を書きます。では、実際に h を 0 に限りなく近づけると $5h$ の h はほぼ 0 になるので $5h$ の値はいくつになるだろう。では 00 さん。」

「そうですね。何かの値に 0 を掛けるとその値は全て 0 になります。だから $5h$ も $5 \times h$ は 5×0 とみなせるので 0 です。ここで、 h は 0 に近づけただけで 0 では無いのにこんな計算をしていいのかと思った人はいませんか。確かに 0 ではありません。しかし、今からいう事がポイントですよ。 \lim という意味は限りなく近づけるという意味で、限りないというのは、ほぼその値だけほんの少しだけちょっとだけずれているから、その誤差は気にするほどでは無いですよという事です。だから、 h を 0 と考えていいという事なのです。」

$$\lim_{h \rightarrow 0} (20 + 5h) = 20$$

「よって、 2 秒後の瞬間の速さは毎秒 20 メートルと求めることが出来ました。ここでのポイントは限りなく『近づける』です。今の場合で考えれば、実際に計算で時間をどんどん小さくして計算するのは、時間はいくらでも小さい数に出来るのでとても大変なことです。しかし \lim を使う事で、とても計算が楽になります。では、今考えた問題では全て 2 秒後の事を考えていましたね。これをいろんな時間で考えればどうなるか一般化してみましょう。」

「先ほど 2 秒としていたところは a 秒に変わるので 2 は a に、 $(2+h)$ 秒は $(a+h)$ 秒に変わりますね。では書き換えてみますね。」

時刻 a から h 秒間で進んだ距離は $f(a+h) - f(a)$

速さ = 距離 \div 時間

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leftarrow \text{平均の速さ}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leftarrow \text{瞬間の速さ}$$

「では皆さん。今黒板に書いたのを見て、どこかで似たような式を見た覚えはありませんか。〇〇さん。」

「今日授業の初めに復習した平均変化率の b を $(a+h)$ に書き換えたものですね。つまり、 x の値が a から $a+h$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率で、 h を限りなく 0 に近づけた時、その平均変化率がある値に限りなく近づくならば、その極限値を、関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数といい、 $f'(a)$ で表します。」

微分係数の定義

$y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数 記号： $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

「今、皆さんは車の速さで考えたので、車を例に考えると、 h 秒間の車の平均の速さが平均変化率になります。その、車が進む時間をどんどん短くして一瞬にする、つまり h 秒を限りなく 0 に近づけた時の瞬間の速さが極限値になっているのです。皆さん想像できましたか。だから、車のスピードメーターの針はいつも瞬間の速さ、つまり極限値を示しているのですね。今度車に乗る時に 1 度平均変化率や極限値の事を思い出して乗ってみてください。いつもと一味違ったドライブになるかもしれませんね。」

「では、実際に問題を解いてみましょう。問 4 を考えてみてください。友達と相談しながら考えても良いし、分からない事や質問がある場合は、今から教室を回るのでどんどん質問してください。」

(予想)

机間指導をする。その時に質問に答えたり、悩んでいるような表情をしている生徒に声をかける。生徒の納得度等を見る。

解説、答え合わせ。

「今日の授業の例にも出しましたが、車やバイクのスピードメーター、例えば台風などで川の水の量がどれだけ増えているか、河口で流れてくる水を図るのはとても無理な事なので、水の速さを出して水量を調べる時など、実は色々なところでこの微分係数が使われています。皆さんも他にどんなところに使われているか一度考えてみてください。では、今日の授業はこれで終わります。」