

シナリオ型指導案例；高校数学・極限

本時の目的

高校数学Ⅲの極限の意味を理解する。

指導過程（高校3年生、2回目の授業）

1. 授業の導入

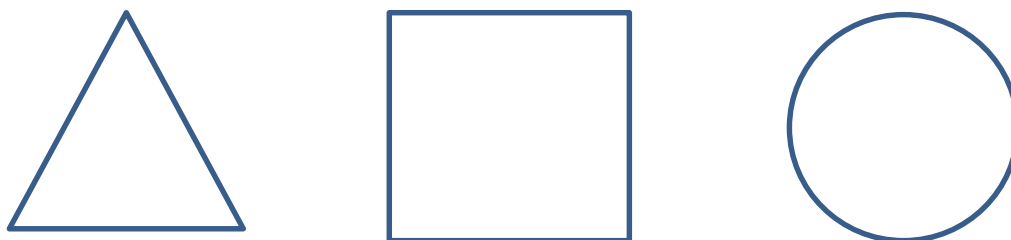
みなさんおはようございます。前回の授業で極限の簡単な演習をやりました。今回はその極限というものがはたしてどんな意味を持つのか考えていきましょう。

実は、この極限という分野は、この次の分野である微分や積分を理解するのに必ず必要です。つまり、とても難しいということです。でもね、この極限という分野を理解したら、いまままで数学をやってきた意味がわかるようになるよ。それでは、早速はじめていきましょう。

Q1. じゃあここでとても単純な問題を出します。

（黒板に三角形、四角形、そして、円の図形をそれぞれ描く。）

さて、これらの面積はどうやって求めるでしょうか？



A, 三角形：底辺×高さ÷2 / 四角形：底辺×高さ / 円：半径×半径× π

（なるべく成績が高くない子に当てて、授業についてこさせる。）

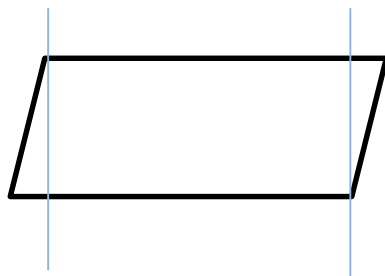
そう正解。三角形と四角形の面積を求められた理由はよくわかる。でも、円の面積の求め方だけは君たちの記憶から引き出してきたんじゃない？そう、子供のころに覚えさせられたよね。半径×半径× π 何度も繰り返した。そこでだ、なぜ円の面積が半径×半径× π なのか考えていこう。

Q2. 円の面積はなぜ半径×半径×円周率か？

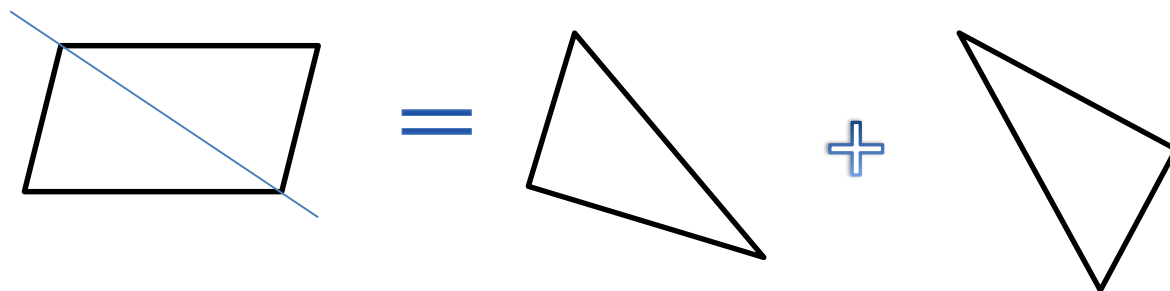
この問題を考えていく。まず、面積というものの意味を考えていこう。まず、四角形。あるブロック一つの面積が1平方メートルだとして、もしそれが縦横それぞれ、10個ずつ並んでいたら、これは100平方メートルだということになる。これは縦×横で求めることができる。

$$10 \text{ 平方メートル} \times 10 \text{ 平方メートル} = 100 \text{ 平方メートル。}$$

もしこれが平行四辺形でも、計算は変わらない。なぜなら、この青い部分で切り取って重ねると四角形になるからだよね。



次に、三角形の面積。三角形は四角形の面積を半分にしたものに変えることができる。つまり、面積も半分になる。



面積の求め方は、たて×よこ÷2ということになるね。

ここまではとても単純な話。でもここから難しくなっていくから覚悟してほしい。

Q3 正五角形、正六角形、正七角形・・・正n角形の面積はどうやって求めるか。

ここで少し時間を取ります。みなさん答えを考えてみてください。

ペンが止まっているこのところに行って、解くのを手伝ってあげる。(5分)

(五分後)さて、答えを考えてくれたかな。では、今から、何人かに前に出てきてもらって、正五角形の面積の答えを書いてもらいましょう。

ランダムに3人あてて答えを書いてもらう。

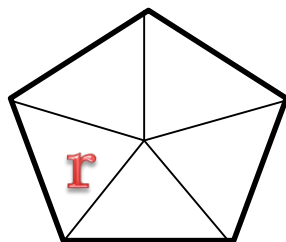
(5分後) はい、ありがとうございます。実はみんなの答え全部が正解です。

実は、この問題を考えてもらったプロセスはこれからやっていくことにとても大きな意味を持つから忘れないでね。

Q 正五角形の面積を考える。

じゃあ、まず、正五角形の面積を考えます。

黒板に図を描く。



この中心から、各頂点に引いた線を r とします。これだけでは捉えづらいので、僕らとなじみ深い3角形で考えていきます。



この、正五角形の中心の角度を θ とします。

Q4 さて、この角度の大きさは? 答えられる人?

A. 72°

そう、正解。 72° だ。これは 360° を5で割ればいいね。こればもし6角形なら、6で割って 60° になる。

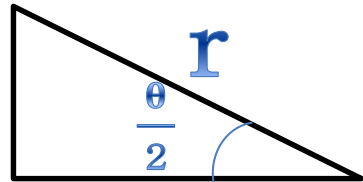
次に、やるのは、この三角形の面積を求めること。

Q5 さてこの3角形の面積を求められる “つわもの” “はいるかな?”

A. シーン...

よし、僕がやろう。今わかっている r とシータをヒントに求める。

さて、この3角形を二つに割ると、こうなる。すると、この半分の面積 S は、

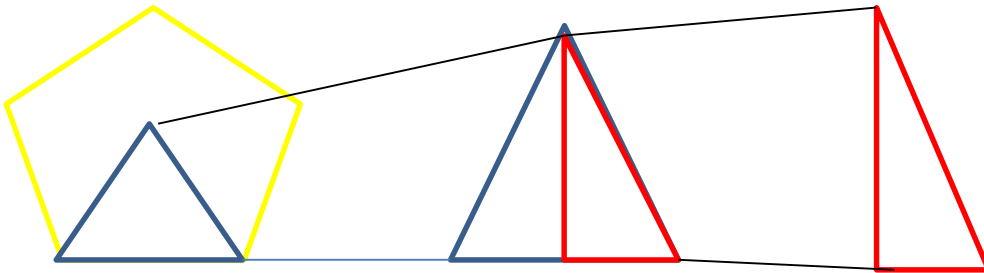


$$S = r \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times r \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

になる。

これは三角関数のサインコサインを応用している。でも、忘れちゃった人はちゃんと数II復習しておいてね。

それでだ、今何をしているのかというと、話をどんどん細かくしてるんだ。つまりね、正五角形の面積を求めるために、形を分解していった。図にしてみるとこうなる。



これで、イメージはつかめたかな？では、本題に戻ろう。

Q6、この正五角形の中で、青い三角形はいくつあるかな。

A.5 個。

Q7、じゃあ、次に赤い三角形の中は正五角形の中にいくつ含まれている？

A. 10個

そう正解。青い3角形に2つ赤い3角形がふくまれてて、その青い3角形は、五角形に5個含まれてるから、答えは5×2の10になる。

赤い3角形の面積はさっき求めたよね。覚えてるかな？
黒板に書く。

$$S=r \times \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \times r \times \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

これだ。もう5角形の面積わかったかな？

Q8. 正五角形の面積は？

A. 正五角形 = $10 \times r \times \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \times r \times \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$

そう正解だ。これで、おしまい。としてしまうと、中学数学で終わりだ。
ここからが高校数学の始まり。

さて、さっきの正5角形の面積の答えをもう一度書く。

$$\text{正五角形の面積} = 10 \times r \times \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \times r \times \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

これを、もう一度見直す。
ここから、話を広げていくよ。

Q9 6角形の場合はどうなるか？

この5角形の前についている10という数字は五角形の5と2をかけて出来てる。
それはわかるよね。

そして、サインとコサインの前についている θ はもともと、五角形の分解で来ているから、 360° を 5 で割った数ということになるね。

このことから、さっきの式を分解すると。

$$\text{正五角形} = 5 \times 2 \times r \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2 \times 5}\right) \times r \times \cos$$

$$\left(\frac{360^\circ}{2 \times 5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

と、こうなるね。

それでだ、さっき 5 の部分を、赤く書いた。この 5 という数字は正五角形の 5 からきてる。とすれば、正六角形の面積を求めたければ、この 5 の部分を 6 にすればいい。これを当てはめると....。

$$\text{正五角形} = 6 \times 2 \times r \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2 \times 6}\right) \times r \times \cos$$

$$\left(\frac{360^\circ}{2 \times 6}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

でも、こう書いても、うそーと思うかもしれない。だから、確認してみよう。まず、一番初めについている 6 は、正六角形を中心から 6 つに分解したという意味だね。イメージできたかな？

次に、角度の中に入ってる 6 は 6 角形を 6 つに割った、中心角を表している、これ、計算すると $360 \div 6 = 60$ になるよね。6 角形を 6 つに分けると正三角形だ、正三角形の 1 辺は 60° だね。

さて、今わかったのは、どんな正 n 角形も中心から各角への長さがわかれば、その面積が、この式で求められるということ。正七角形も、正八角形も、正九角形も、etc... 三角形に分解すれば求められる。

つぎにするのはこの考え方と極限をつなげること。

Q10 じゃあ、質問。正 n 角形の n を限りなく無限大まで近づけると、どんな形になるか？
2分だけ時間をとるので、みんなが考えた形をノートに書いてみてください。

A. 円になる。

そう、正 n 角形の n を大きくしていくとだんだん、角がふえていって、角が細かくなって
てくるよね。角の部分がだんだんなめらかになり、円になるんだね。

みんな、最初の質問は覚えているかな？円の面積はなぜ、半径 \times 半径 $\times \pi$ か？その答えはこ
の式にある。正 n 角形の面積を求める公式を書いてみると。

$$\text{正 } n \text{ 角形} = n \times 2 \times r \times \sin \left(\frac{360^\circ}{2 \times n} \right) \times r \times \cos$$

$$\left(\frac{360^\circ}{2 \times n} \right) \times \left(\frac{1}{2} \right)$$

となる。円の面積は半径 \times 半径 $\times \pi$ だから、中心から辺までの半径 r だけを抜き出して、
極限の記号を使って表してみる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (r \times r) \times 2 \times n \times \sin \left(\frac{360^\circ}{2 \times n} \right) \times \cos \left(\frac{360^\circ}{2 \times n} \right) \times \left(\frac{1}{2} \right) = \text{円の面積}$$

こうなるね。この、 r というのは円の半径のことだから、 n には直接関係がない。なので
 r より、後ろの極限の操作をすればいい、もう気づいたかな？この部分が円周率 π に
なる。つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \times n \times \sin \left(\frac{360^\circ}{2 \times n} \right) \times \cos \left(\frac{360^\circ}{2 \times n} \right) \times \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \pi$$

になるということなんだ。

でもね、ここから先はコンピュータを使わないと計算ができない。だから、最後に、君たちにやってほしい宿題を渡します。

宿題： $1000000 \times \sin(\pi \div 1000000) \times \cos(\pi \div 1000000)$ の値を関数電卓で計算すること。(ただし、角度はラジアン (rad))

関数電卓がなくてもネットで調べてみれば、この計算をしてくれるアプリが見つかるよ。

この計算は実際には無限大まで計算してないけど、十分 π に近づくはずだ。

これの答えは、みんな驚くと思うよ。

さて、今回の授業は極限という分野についてでした。もともと、極限というのは、昔の偉大な数学者たちが、無限というものをとらえようとして生まれた分野だ。天文学者が夜空の星の先を想像するみたいに、数学者も見えないものの先を見ようとしたんだね。

君たちはどんな景色をこれから見ていくのか、先生は楽しみです。

これで授業を終わります。

ありがとうございました。