

シナリオ型指導案：高校数学（複素数の導入）

対象学年：高校2年生

教師の発言...「 」

生徒の発言...『 』

ナレーション... 斜体

本時の目的

方程式の解は、 x のとりうる数の範囲を指定して初めて定めることを通して、数の範囲を自然数、整数、有理数、実数、複素数と広げる意味を理解させるとともに、複素数（虚数）の存在の意味について伝える。

本時の指導過程

教室に入り、起立・礼・着席の挨拶をする。その後、軽く生徒とコミュニケーションをとる。時間設定は、中間試験が終わった直後の授業ということで、テスト結果について話題をふる。

「はい、みなさん。前回の中間試験もそろそろ返却されてきましたね。どうでしたか？」

『全然できんかったあ～。』、『やば～、赤点いっぱい取っちゃった（泣）』、『まあまあできたよ』

「そうですか、出来た人も出来なかった人もいるみたいだね。けど、過ぎてしまった事をいつまでも後悔しても仕方がないことです。出来た人は気を抜かず、出来なかった人は精一杯勉強して、次のテストを頑張りましょう。それでは気を取り直してやっていきましょう。」

授業に入る。

「は～い、それでは今日から、第2章、複素数と方程式の単元に入ります。」

ある一人の生徒が発言してくる。

『先生～、この範囲は難しいですか？』

「ん～、それは人それぞれだと思うけど、この単元は比較的やさしいと思うよ。」

『そっかあ、じゃあ頑張ろっと。』

「うん、しっかり聞けばわかるはずだから、よく聞いていてね。」

「じゃあやっていくよ。君たちは、いままで方程式を解いてきたよね？ここでも方程式の解を求めるんだけど...、数には自然数、整数、有理数、実数などがあったのを覚えているかな？」

『覚えているよ～。』、『ん～なんとなく覚えているかな...。』、『名前は知ってるよ。』 < e.t.c.... >

「そうだね。じゃあ、とりあえずこの問題を解いてみて。」

(板書)

$$x + 3 = 0$$

『先生～，こんなの簡単だよ！ $x = -3$ だよ！』

「そうだよね...，でもよく考えてみて！この方程式って**自然数の範囲では解がない**よね？」

『うん。。。』 『それがどうかしたの？』 <e.t.c...>

「うん、この問題では解を求めるために，中学校では**数の範囲を自然数から整数に広げて** -3 と解を出したんだよ。」

『ふ～ん，そうなんだ。』

杉浦コメント：私なら、「(板書) $x + 3 = 0$ を解け。ただし答えは自然数とすること。」として、 $x = -3$ と答えたら、「正解、と思いきやブー」と言って、自然数の定義を言って、数の範囲を広げないと解が出ないことを知らせるかな。以下も基本は同じ。

「この問題だけではこの単元の目的を説明できないから，もう少しだけ簡単な問題を解いていくよ。」

『おっけ～』

「じゃあ次，この問題を見て。」

(板書)

$$3x = 2$$

『これも楽勝～！ $x = \frac{2}{3}$ だよ。』

「そうだよね...，この方程式の場合は**整数の範囲でも解がない**よね？」

『うん。。。』，『たしかに。。。』，『先生，こんな問題で何がしたいの？まだわからないよ～』

「もうちょっと待ってね，だんだんわかってくるから。」

「整数の範囲で解がないってことは、分数の形、つまり**数の範囲を整数から有理数まで広げる**と、 $x = \frac{2}{3}$ と出てくるよね。」

『うんうん。。。』、『何か先が読めてきたかも。』、『先生～、もしかして、数の範囲をどんどん広げていくの？』

「さん、するどいねえ。実はそうなんだよ。中学校を卒業してきた君たちにとって、当たり前すぎて面白くなかったよね。先生が言いたかった事は、数は**有理数の中に整数が含まれ**ていて、**整数の中に自然数が含まれ**ているということを言いたかったんだよ。つまり、**方程式を解くためには、数の範囲を広げていく必要がある**ということを知ってもらいたかったんだ。」

ここまで説明した後に教科書に入り、レベルを上げていく。

「ここまでいいかな～？」

『おっけ～、大丈夫。』

「この先もっと数の範囲を広げていくよ～」

「それじゃあ、教科書30ページを開いて。」

「じゃあ、30ページの3行目に書いてある2次方程式を見て。」

(板書)

$$x^2 = 2$$

「これ解いて～。」

『はい！ $x = \pm\sqrt{2}$ です。』 『これも簡単、簡単～』

「そうだね。**この方程式は有理数の範囲でも解をもたない**よね。だから無理数を考えて、**数の範囲を有理数から実数まで広げた**んだよね。」

『なるほど。。。』

「いままで君たちは、最終的に数を実数の範囲まで広げると、殆どすべての方程式が解けたんだよね？」

『うん、解けたよ。』

「だよな。じゃあ30ページの6行目の方程式はどうだろう？」

(板書)

$$x^2 = -1$$

『先生～、2乗してマイナスになる数なんて存在しないよ？』

「うん、中学校の先生には、**2乗してマイナスになる数は存在しません。**

と言われたはずだよ。けどね、この单元では、このような方程式を解いていくために、数の範囲を実数からさらに、虚数(きよすう)と呼ばれる数まで広げてあげるんだよ。」

『へえ。。。』、『なんか難しそう。。。』

「別に不安に思わなくてもいいから...、いまから順を追って説明していくからね。」

ここから、この单元の本題に入る。

「じゃあ本題に入るよ。　　さん、30ページの8行目と9行目を読んでみて。」

さんが読み終える。

「ありがとう、ここで **2乗すると - 1 になる新しい数を 1つ考えます。** これを文字*i*で表します。これを虚数単位って言うから覚えててね。」

「じゃあ、これをノートにまとめておこう。」

(板書)

2乗すると - 1 になる数を1つ考え、これを文字*i*で表す。これを**虚数単位**という。つまり $i^2 = -1$ となる。

*i*とは... $x^2 = -1$ をみたす x の1つを*i*で表すという意味である。

*i*は 虚数単位 (*imaginary unit*) の頭文字である。

「これは定義なので、このまま使ってくださいね。ここまでいいかな？」

『うん、大丈夫』、『まだ余裕～』

「じゃあ次いくよ～！」

「いま、虚数を扱ったけど、30ページ12行目に載っている $3+2i$ って 実数+実数×虚数の形になっている数があるよね？ これを一般的に $a+bi$ として、このような数を考えてみよう。」

『なんか複雑そう...』

「そんな事ないよ。このように $a+bi$ の形で表される数を**複素数**って言うんだ。」

『そうなんだ...』

「さらに、複素数 $a+bi$ の a を実部、 b を虚部といいます。この言い方覚えてね。」

「たとえば、 b の部分が0の複素数って実数 a に等しくなります。」

「それと、もう1つ大事な名前を覚えておくね。」

『え～まだあるの?? そんなに覚えられない。』

「もうちょっとだから、付いてきて。」

「複素数 $a+bi$ を虚数って言います。特に $a=0, b \neq 0$ の虚数は bi と書けるよね。

こんなふうに、**実部が無くて、虚部しか無いものを純虚数とい**
ます。」

「さあ、1段落つきました。じゃあ今までの事を黒板にまとめるから、みんなしっかりノートとってね。」

(板書)

$a+bi$ の形で表される数を複素数という。

また、複素数 $a+bi$ の a を実部、 b を虚部という。

例. $3+2i$ の実部は3、虚部は2である。

虚部が0である複素数 $a+0i=a$ は実数 a を表す。さらに $a+bi$ を虚数という。

特に、 $a=0, b \neq 0$ の虚数は bi と書き、これを純虚数という。

例. $5+0i$ は実数5

$0+3i$ すなわち $3i$ は純虚数である。

ここで複素数（虚数）の存在に疑問を抱く生徒が発言してくる。

『先生～、なぜ複素数のような数が存在するのですか？』

杉浦コメント：これは先生つつこみ質問にしてもいいかな？計画段階では生徒から発言があるかわからないわけだから。

『ところでさ～、なんで複素数のような数が存在するんだろ？別にこんなわけのわからん数なんていないやんか！？』とか。

「非常に良い質問だね、けどこれを説明するのは非常に難しいんだよ。だから高校生向けに話をするよ。」

『わかった。』

「えっとね、虚数というと想像される空想的なもののように感じる人が多いんだけど、

方程式を解けるように という **目標** のもとに、

数の範囲を広げてきた最後の数が複素数であって、数学の理論上、あらゆる部分で活用されているんだよ。だから、複素数が存在することによって、どんな方程式でも解けるようになるんだよ。」

『へえ、そうだったんだ。』

「良い質問だったよ、こういう些細な事を聞くのも数学を学ぶ上で大切な事だよ。」

本題に戻る。

「ここまでで質問ないかな？ 君大丈夫？」（不安そうにしている生徒に聞いてみる）

『はい、大丈夫です。』

「質問あったらすぐに言ってね、先生も高校時代、わからないことをため過ぎてテスト前に酷い目にあったことがあるからね。君たちも未解決な事をためていかないようにね。」

「それじゃあ30ページの練習1の問題を解いてみて。時間が経ったら4人に当てるよ。あと教科書忘れてる人が何人かいるみたいなので、問題を黒板に書いておくから、見るように。」

(板書)

練習1 次の複素数を, $a+bi$ の形で表せ。

(1) $-2-3i$ (2) $\frac{-2+\sqrt{5}i}{3}$ (3) -4 (4) $5i$

5分ほど待つ

「よし、じゃあ今月は7月なので、出席番号7番、17番、27番、37番の人答えて。」

生徒が答え終わる。

「うん、いいね。これは単に与えられた式を複素数 $a+bi$ の形に書き換えるだけだよね。言い忘れてたけど、 i は普通の文字のように扱っていいんだからね。ただし $i^2 = -1$ だから2乗が出てきたら -1 にするのを忘れないようにね。」

チャイムがなる

「それじゃあ時間がきました。今日は複素数という全く新しい数について学習してきました。次回からは、複素数について言える、いろいろな性質、計算の仕方についてやっていくので今日の内容はしっかりと復習しておいてね。今日は導入だけだったから、そんなに内容は多くないからね。」

「はい、今日はここまで！ 日直、号令！」

『起立、礼、着席』

教室から出て行く

杉浦コメント：虚数の方程式の計算自体は、それこそ単なる一次方程式でそんなに難しくない。大事なのは「何で虚数なんてあんなねん！？」に答えること。この指導案は、その「虚数の意味」について、生徒への働きかけを通して教えられている。この働きかけがとてもよい。ちなみに私ならもっと大きめに大発明、虚数！なんて言葉を使って強調するかも。