

●本時の目的

教科書では公式化されている2次関数の平行移動の公式について、“なぜそうなのか”ということを中心にきちんと理解させ、その考え方が今後の発展において大切であること、数学は暗記科目ではないことを知ってもらおう。

●本時の指導過程

起立・礼・着席

「さて、今回は $y = ax^2$ のグラフを平行移動した $y = a(x-p)^2 + q$ というグラフについて勉強してんだけど、覚えてるかな？軽く復習しとこか。」

「 $y = 2x^2$ のグラフっていうのはこんな放物線でした。これは中学校でも習ったやつやな。今、このグラフの頂点、つまりこの丸くなって一番下のとこの座標は(0,0)の点やねんけど、高校ではこの頂点がもし(3,2)やったら、グラフの式はどうなるかな？ってことを考えます。(3,2)ってことは(0,0)から考えると、右に3、上に2移動しています。この移動後の式は $y = 2(x-3)^2 + 2$ になるんですね。なんで移動したら $y = a(x-p)^2 + q$ の形になるかってのは、前回、表を書いて確かめてもらったよな。思い出したか〜？」(板書しながら説明)

「宿題でも練習したし、そろそろ平行移動にも慣れてきたかな。じゃあ、これで平行移動はおしまいやねんけど、ここまでの内容で何か質問はない？」

(おそらく、特に質問なし)

「このままで納得できる？なんか疑問が残れへんかな？なんでこうなるんって思うところとか。」
(難しい発問だが、気づきを大切にするためにも全員に考えてもらう。)

(沈黙)

「今日は、ここで質問なかったら授業進まれへんねん。(笑)」

「誰も答えてくれへんから当ててみよか〜、じゃあ〇〇君。」

反応予想：別に / 特になし / 表書いて確かめたけど、よくわからん / 符号が・・・
(五人ぐらい当ててみて、答えがなければ、こちらから具体的に言う。)

「じゃあ言おうか、 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$ の放物線の頂点を教えてください、〇〇さん。」

「そう、 $(-2,3)$ やんな。これ、なんで x 座標の方だけ符号を逆転させるんやろ？」

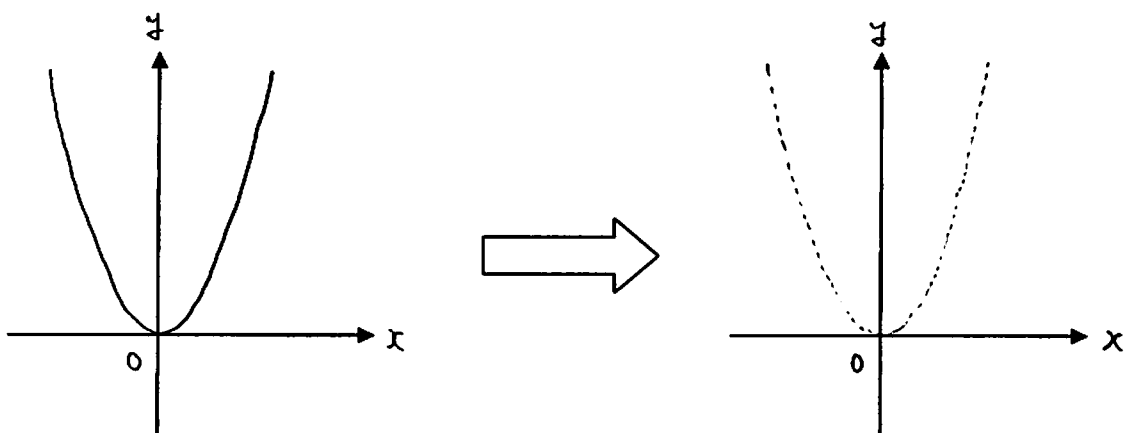
「これ不思議じゃない？同じ疑問を持った人もおるやろうけど、できればみんなにもこういう根本的なところに疑問を持ってほしいねん。ここだけじゃなくて、数学では常にそういう態度で勉強して欲しいな。“おぼえてしまえば、いいや”と済ますんじゃなくて。」

「さて、いまからみんなに持ってもらった疑問を解決しようと思います。でも、簡単には解決できひんから、よーく考えながら集中して聞いてや。」

「まず、座標の話からしよう。みんなびっくりするかもしれんけど、実は、座標の上には点しかのらないんですよ。」

反応：え？どうということ？ / 1次関数とか2次関数とかあるやん！ / 直線とか曲線は？

「実は直線とか曲線っていうのは“点”がめーっちゃいっぱい集まったものやねん。たとえばこの放物線も、わかりやすく書くとこういうことになる。」



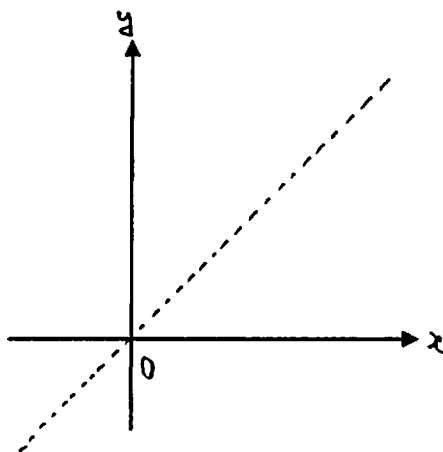
反応：へえー / めっちゃいっぱいってどれくらい？

「めっちゃめちゃたくさんの点やから無限個やで。」

反応：そんな適当でいいん？ / 無限っていつでもその放物線とぎれてるやん。

「この放物線はとぎれてないよ。別に定義域は制限していないからね。本当はもっともっと上まで書きたいけど、黒板がここまでやからここで止めてるだけ。それに、例えばこの放物線が $y = x^2$ だとしたら、 $(0,0)$ と $(1,1)$ の点の間にも $(0.1, 0.01)$ だったり $(0.01, 0.0001)$ という点があるわけだから、無限個やな。」

「で、数学で座標にのってる直線とか曲線、つまり点の集まりってのは、必ずなにか規則があります。たとえばこの点の集まりにはどんな規則があると思う？」



反応：まっすぐに並んでいる

「うん、確かにまっすぐに並んでいるね。でも、もっと厳密に言ってみよう。x座標とy座標の値に注目すると、どんな規則がある？じゃあ〇〇君。」

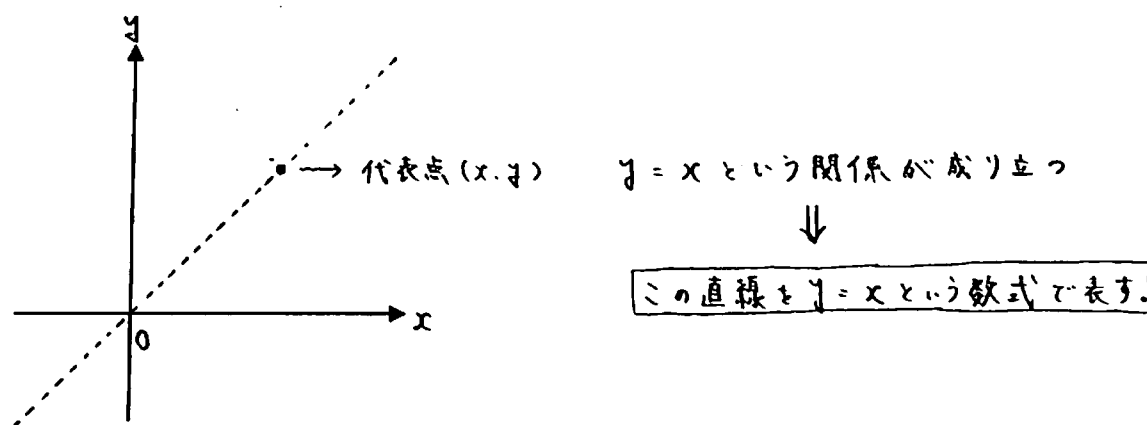
反応：等しい / わからない (この場合はわかりやすくサポートするか、次の人を当てる。)

「そうやな、等しい。つまりこの点は“x座標とy座標の値が等しい点の集まり”という規則がある。ここで僕たちはこの規則を使って、この直線に名前を付けたい。でもみんなはもうこの直線の式、いえるよね？」

反応： $y = x$

「そう。中学の時に習ったからみんなわかるけど、その時は“傾きが1、切片が0、だから $y = x$ ”という説明だったと思う。今回はちょっと違った考え方から直線の式を求めてみよう。」

「そこで、この点の集まりの中からひとつを代表として選んで、その代表点の座標を (x, y) とすることにします。じゃあ、この点の集まりには x 座標と y 座標の値が等しいという規則があるのだから、この代表点 (x, y) に、 $y = x$ という関係があるよね。この関係式をそのまま、この直線の名前にしちゃうのです。」



「こうやって直線の式は表されるんやなー。もう一回まとめて言うと、代表の点に対して成り立つ関係式がそのまま直線や曲線の名前になるっていうことね。これは1次関数や2次関数だけでなく、これから出てくる全ての直線や曲線に使えることです。」

「ここまでで何か質問はないかな？」

「じゃあ本題に入っていくで。」

例題： $y = x^2$ を x 軸方向に2、 y 軸方向に -3 だけ平行移動した曲線はどのように表すことができるか？

「この問題は公式を使えば、みんなできるはずやな。でも、公式を知らないものとして、公式を使わずに考えていくで。」

「僕たちが今知りたいのは、平行移動した後の曲線の名前やから、移動後の曲線、つまり点の集まりから一点を選んで代表点 (x, y) にしよう。」

「ここで、この (x, y) っていうのは、もともとは $y = x^2$ という規則の点の集まりの中にあつた点で、それを x 軸方向に2、 y 軸方向に -3 だけ平行移動したものや。」

「ということは、この代表点の移動する前の座標はわかるかなー？ちょっと難しいかな？〇〇さん、どう？」

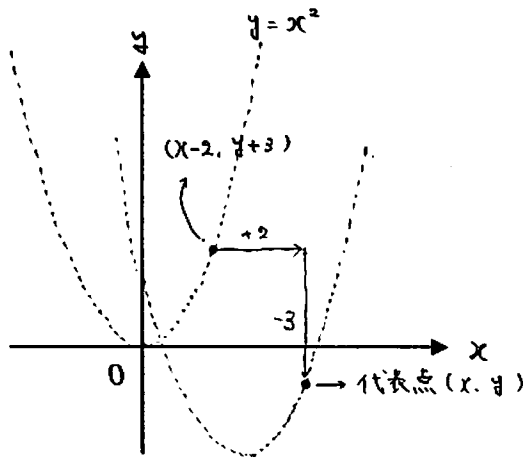
「そう！ $(x-2, y+3)$ になるよね！」

(答えられなければ答えられるようにヒントを与えたりしてサポートする。)

「みんなもわかったかな？ x 軸方向に2、 y 軸方向に -3 平行移動して (x, y) になったんやから、移動前は $(x-2, y+3)$ になるね。そして、 $(x-2, y+3)$ っていう点は移動前の曲線 $y = x^2$ の上についている点のはずやな。」

「つまり、 $(x-2, y+3)$ という点は、“ x 座標を2乗した値と y 座標の値が等しい”という規則があるはずやから $y+3 = (x-2)^2$ とできる。」

「これを $y =$ の形で表すと、 $y = (x-2)^2 - 3$ となって、これは代表点 (x, y) の関係式や。ということは、これが求めたかった曲線の名前でした。」



「どう？一発で今言ったことを理解するのは難しいと思う。練習問題をして理解を深めようか。」

問題：(1)放物線 $y = x^2$ を x 軸方向に1だけ平行移動した放物線の式を求めよ。

(2)放物線 $y = 2x^2$ を x 軸方向に -1 、 y 軸方向に2だけ平行移動した放物線の式を求めよ。

「この2問、いままでは公式を使ってすぐに解けた問題やけど、今やったようなやり方で解いてみよう。わからない人は質問してな。」

(時間を与えて問題を解かせる。机間巡視をして、ちゃんと板書をしているか確認。わからない生徒には説明をする。)

「じゃあ〇〇君と〇〇さん、前で解いてくれるかな。」

「ありがとう。じゃあみんな前をみてね。2人が解いてくれました。これで正解です。」

「この問題練習で気づいたかな？最初は長々と説明して難しかったかもしれないけど、(2)でいうと、 x 軸方向に -1 、 y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線の式は？と聞かれて結局やっていることって言うのは、“ x のかわりに $x+1$ 、 y のかわりに $y-2$ ”とおいてるだけやねん！」(強調)

「(2)の答えは $y = 2(x+1)^2 + 2$ やけど、この放物線の頂点は何になる？これを解いてくれた〇〇さん。」

「そうですね。 $(-1, 2)$ となります。」

「では、この考えを応用すると、 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の式は、 x のかわりに $x-p$ 、 y のかわりに $y-q$ とおけばいいから、 $y-q = a(x-p)^2$ となることがわかるね。」

「この放物線の頂点は (p, q) です。最初に戻るけど、僕たちが持っていた疑問は“なんで x 座標の方だけ符号を逆転させるんやろ”ということでした。」

「疑問は解決できたかな？そう、 $y-q = a(x-p)^2$ を $y = a(x-p)^2 + q$ という形で表すから、なぜ x 座標の方だけ？という疑問が生まれたのですね。実は平行移動を考えるなら $y-q = a(x-p)^2$ の形の方が自然だということです。」

「今日は頭を使ったからみんな疲れたかな？今日でみんなは平行移動の公式について真の理解を得ることが出来ました。数学に出てくる公式を記憶することは大切やけど、それ以上に大切なのは、“どのような考え方で公式が導かれたのか”ということなんです。今回の公式で言うと、“代表の点が満たすべき関係式は何か？”という考え方でしたね。この考え方はこれから数Ⅱ、数Ⅲと数学をやっていく中で何度も出てきます。僕はいつも言ってることやけど、数学は暗記科目じゃない。極端な話、もし九九を忘れてしまっても、かけ算の意味を理解していれば、おはじきを並べて数えれば九九を導くことができるよね。このように公式が導かれた考え方を理解していれば、公式を導くことが出来る。ただ、高校の定期テストや大学入学試験でいい点を取りたければ、そんなことをしている時間はないから、覚えないといけないけどね。全ての公式には導かれた考え方があります。今までの知識では説明できないことも多いけど、できるだけ“なんで？”という批判的精神、学問的態度で勉強して下さい。」

「じゃあ今日はこれで終わります。」