

シナリオ型指導案：高校数学 B（数学的帰納法）

1. 本時の目的

『数学的帰納法』は、数学だけにかかわらず、身近に使われていることを知ってもらったうえで、『数学的帰納法』という新しい証明方法について、その重要性と活用方法について学んでもらう。なお、理解を深めてもらうために、教科書には載っていないが、『帰納法』と『演繹法』という言葉を用いて、それぞれを比較し、『数学的帰納法』の根本原理についての説明をする。

2. 本時の指導過程

教室に入り、起立・礼・着席をし、軽く雑談をして、前回の授業の復習から授業を始める。

「では、授業を始めましょう。前回は、数列の分野の『漸化式』というものについて勉強していました。その内容について、サラッと復習しましょう。皆さん、『漸化式』がどういうものか覚えていますか？」

→何人かに当てて聞いてみる

生徒の反応：忘れた／少しなら覚えている など

「『漸化式』というのは、例えば、数列 $\{a_n\}$ が

[1] $a_1 = 1$ [2] $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n=1,2,3,\dots$) のように定義されているとします。

この式のように、前の項と次の項との関係式を表している等式のことを『漸化式』と言うのでしたね。思い出せましたか？」

→生徒たちを見渡して、特に質問がなさそうなら進める

「では、今日の内容『数学的帰納法』に入っていきますね。教科書の 110 ページを開けてください。『なーんだ、証明か』と思った人もいるかもしれませんが、これは先生やみんなも日ごろ使っていることです！まずは、『帰納法』とは何か？について説明しましょう。

ところで、今年の夏は暑かったですねー。新聞やニュースでも取り上げられていましたね。きっと、来年以降の夏も暑いんでしょうね。

今、先生が言ったこと、実は『帰納法』を使っているんです。もう一つ例を挙げてみましょう。皆さん、カラスは知っていますよね？皆さんが今まで見たカラスの色って何色ですか？」

→1~2人にあてる

生徒の反応：黒色（もしかしたら、中には物知りな人がいて、黒白の二色とか暗褐色とか言うかもしれないが、その時は黒と答える方向に持って行かせる）

「ですよね。先生もカラスは黒色しか見たことがありません。その結果から、『僕を見たことがあるカラスは、みんな黒色だから、すべてのカラスは黒色だ』と少し強引ですが、考えることができます。これにも『帰納法』を使っているんです。つまり、『帰納法』とは、『1つ1つの具体的な事実から推測をして、一般的な法則などを導く方法』ということなんです。ただし、『帰納法』の結果は必ずしも正しいというわけではありません。正しいことも間違っていることもあります。そりゃそうですね？『僕を見たことがあるカラスは、みんな黒色』だからといっても『すべてのカラスが黒色』というわけではありません。ちなみにカラスには白黒とか暗褐色に白斑点というものもいるらしいですよ。」

板書：

11/17 P.110~ 数学的帰納法

◎帰納法とは？

1つ1つの具体的な事実から推測をして、一般的な法則などを導く方法。

例

- (1) 今年の夏は暑かったから、来年以降の夏も暑くなるだろう。
- (2) 僕を見たことがあるカラスは、みんな黒色だから、すべてのカラスは黒色だ。
- (3) 東大に通っている僕の友達は、賢いのだから、他の東大生も賢いのだろう。

etc...

※ただし『帰納法』の結果は必ずしも正しいというわけではない

「『帰納法』については少し分かりましたか？」

→生徒の様子をうかがう。質問があれば、受けつける。

「では『数学的帰納法』について話していきます。『数学的帰納法』は『帰納法』とは逆のことをします。『帰納法』は『1つ1つの具体的な事実から推測をして、一般的な法則などを導く方法』でしたね。『数学的帰納法』は『一般的な法則などから、1つ1つの具体的な事実にあてはめて、推論を導く方法』なんです。ちなみに、大学に入ったら習うことですが、『数学的帰納法』は『演繹法』とも呼ばれています。

板書：

えんえきほう

帰納法 ↔ 演繹法 = 数学的帰納法

◎数学的帰納法(=演繹法)とは？

一般的な法則などから、1つ1つの具体的な事実にあてはめて、推論・事実を導く方法。

(↓板書を書きながら話す)

「では演繹法を使った、例を挙げてみましょう。例えば、日本国憲法を使ってみると、『すべての国民は個人として尊重される』と定められていることから『私も個人として尊重される』ということが言えますね。

もう一つ挙げておきましょう。『すべての正の整数は0よりも大きい』ということから『3は0よりも』どのようになると言えますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応：3は0よりも大きい

「ですね。このように『一般的な法則などから、1つ1つの具体的な事実にあてはめて、推論を導く方法』を『数学的帰納法』や『演繹法』というのです。ちなみに『数学的帰納法』や『演繹法』は一般的な法則、言ってみれば命題ですね、それが成り立つ限り、『数学的帰納法』『演繹法』で導き出された結果は常に正しいです。」

板書：

例

(1) 日本国憲法では『すべての国民は個人として尊重される』と定められているので、『私も個人として尊重される』。

(2) すべての正の整数は0よりも大きいので、3は0よりも大きい。

etc...

※『数学的帰納法』や『演繹法』は元の命題が成り立つ限り、『数学的帰納法』『演繹法』で導き出された結果は常に正しい

『数学的帰納法』『演繹法』についてはわかりましたか？」

→生徒の様子をうかがう。質問があれば、受けつける。

「では、下準備が整ったところで、本格的に今日の内容に入っていきます。」

板書：

◎数学的帰納法の定義

自然数 n に関する等式や不等式(①とする)がすべての自然数 n について成り立つことを証明する方法。

①を証明するためには、次の2つを示す必要がある。

[1] $n=1$ のとき、①が成り立つ

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のときにも①が成り立つ

「じゃあ、なんのために『数学的帰納法』なんか勉強するのか？

それは『なんで一つひとつ数えて証明するのはダメなんですか？』という質問とほぼ同じことなんです。一つひとつ数えて証明していくといっても、自然数というのは無限個あるわけです。

『 $n=2465000000$ まで成り立つことを示せました』と言っても、それよりも大きい自然数がいくらでもあるわけです。そんな一つひとつ数えていても、つまり有限個数えていても、一生終わりません。そこで『すべての自然数について成り立てば、一つひとつ数えなくて済むのに……』と思うわけです。そういう思いから生まれたのが、『数学的帰納法』なのです。では『数学的帰納法』の骨格となる部分について話していきましょう。

ところで、皆さんはドミノ倒しを知っていますよね？」

生徒の反応：知っている／次々倒れていくやつ／無反応 など

「ほとんどの人が知っているみたいですね。ドミノ倒しというのは、1つ目を倒すと、2つ目、3つ目、4つ目、……というふうに、あとのものが次々と倒れていくあれですね？じつは今日勉強する、『数学的帰納法』というのはそのドミノ倒しの原理を使った、証明方法なんです！」

板書：

数学的帰納法＝ドミノ倒しの原理！！

『数学的帰納法』の骨格は、『 $n=k$ ときに成り立つなら $n=k+1$ のときにも成り立つ』という部分にあります。

このことさえ示せば、後は自動的に『 $n=2$ (2番目)で成り立つなら、次の $n=3$ (3番目)でも成り立つ。 $n=3$ (3番目)で成り立つなら、次の $n=4$ (4番目)でも成り立つ。 $n=4$ (4番目)で成り立つなら、 $n=5$ (5番目)でも成り立つ。……というように無限に続く n について、まるで、ドミノ倒しのように次々と示していってくれることになるわけです。ですが、そのためには、一番始めの出発点を用意しなければならないんです。ドミノ倒しをするときもスタート地点が必要ですよ

ね？
そのために、まず $n=1$ (1番目)において、与えられた式が成り立つかを調べます。これが示せ

れば、後はさっきのドミノ倒しが続いていき、すべての自然数 n について、与えられた式が成り立つというわけです。どうですか？」

生徒の反応：なるほどという様子／イメージはできているようだが、まだピンときていない様子

「じゃあ、まだピンときていない人のために、例をだして、説明していきましょう。」

板書：

例	$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$	……①
この等式を数学的帰納法によって、証明せよ。		

「この式は 1 番目から $2n-1$ 番目までの奇数を足すと、 n^2 になる、ということを表しているんですが、それを証明しろという問題です。

まず、さっき板書にも書いたように、証明するには[1][2]を示さなければいけません。

まず、 $n = 1$ のときに①の式が成り立つかを調べてみましょう。」

板書：

(証明)
[1] $n = 1$ のとき

「まず、 $n = 1$ のとき、 $2n - 1$ 番目は、 $n = 1$ を代入すると、1になるので、 $2n - 1$ 番目は 1 番目ですね？ということは、左辺は 1 番目から 1 番目まで足すということになりますから、要するに左辺は 1 番目だけ、つまり 1 だけになりますね？次に右辺ですが、 $n = 1$ のときは何になりますか？」

生徒の反応： 1

「そうですね。ということは、左辺=右辺になりましたね？つまり、これで $n = 1$ のときに①が成り立つということが言えるわけです。」

板書：

(左辺) $= 2 \cdot 1 - 1 = 1$	(右辺) $= 1^2 = 1$
よって、(左辺)=(右辺)となるので、①は成り立つ	

「次に、 $n = k$ というときについて考えてみましょう。 $n = k$ のとき、①が成り立つと仮定するんですね。つまり、①の両辺に $n = k$ を代入します。すると、①の式はどうなりますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

「そうですね。あってます。今、答えてもらった式を②と名付けておきますね。」

板書：

[2] $n = k$ のとき①が成り立つと仮定する。
つまり、 $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ ……② が成り立つと仮定すると
 $n = k+1$ のとき

「このときに、 $n = k+1$ で①が成り立つかについて考えてみましょう。『どうしたらそんなわかるねん』と思う人も多いと思います。それを示すために、もともと与えられている、①という式を使うんです。方針としては、①の式の左辺に $n = k+1$ を代入して、その結果が右辺と等しくなればいいわけです。『なんで、左辺に代入するん？右辺でもいいやん』という人がいるかもしれませんが、右辺に $n = k+1$ を代入しても、左辺と等しくしようと思ったら大変ですよ。だから、左辺に代入してスタートするんです。では、 $n = k+1$ を左辺に代入してみましょうか。どうなりますか？」

→生徒にあてて黒板に書いてもらう

生徒の反応： $1+3+5+\dots+\{2(k+1)-1\}=(k+1)^2$

「OKです。ではここから少しテクニックを使ってこの式を変形していきますね。よく見ていて下さい。ところで、これは1番目から何番目までを足した式でしたか？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $k+1$ 番目

「でしたよね？ここで1番目から $k+1$ 番目まで足した式について k 番目について考えてみます。ここが変形のポイントなのです。さて、 k 番目の式はどのように表されていましたか？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $(2k-1)$ (分からないようならヒントを与える ②の式を思い出させるなど)

「そうでしたね。これを考えると……

板書：

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}$$

となりますね。この式を見て、何か気付くことはありませんか？」

→1~2分程時間をとる。

→3人くらいにあてる。

生徒の反応：②の式が入っている。／わかりません。→ヒントを出す

「そうです！実はこの $1+3+5+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}$ という式の中には、②の式、 $1+3+5+(2k-1)$ という式が入っているんです。ところで、この $1+3+5+(2k-1)$ という式は②の式から、 k^2 とイコールであることがわかりますね。ということは？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $k^2+\{2(k+1)-1\}$ になる。

「そうです。 $1+3+5+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}$ の $1+3+5+(2k-1)$ という部分が k^2 に書きかえられて $k^2+\{2(k+1)-1\}$ になるんです。あとはこれを展開して、整理していただくだけです。展開して、因数分解していくと……

板書：

$$\begin{aligned} &= \underline{1+3+5+(2k-1)} + \{2(k+1)-1\} \\ &\quad \swarrow \\ &\quad = k^2 \\ &= k^2 + \{2(k+1)-1\} \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

となりますね。ここまでで最初と最後をみると……

板書：

$$\text{よって } 1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} = (k+1)^2$$

となっていますね？これを①の式と見比べてみましょう。すると、どういうことが言えますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応：①の式に $n=k+1$ を代入したもになっている！

「そうです！ $1+3+5+\dots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} = (k+1)^2$ は①の式に $n=k+1$ を代入したもになっているんです！ということは、 $n=k+1$ のときにも①が成り立つということがいえますね。これで、[1][2]を示せたわけです。なので、『[1][2]よりすべての自然数 n に対して①は成り立つ』と証明できたわけです。」

板書：

これは、 $n=k+1$ のときにも①が成り立つことを示している。
したがって、[1][2]よりすべての自然数 n に対して①は成り立つ

「最初にも言いましたが、『 $n=k$ ときに成り立つなら $n=k+1$ のときにも成り立つ』ということさえ示せば、後は自動的に『 $n=2$ (2番目)で成り立つなら、次の $n=3$ (3番目)でも成り立つ。 $n=3$ (3番目)で成り立つなら、次の $n=4$ (4番目)でも成り立つ。 $n=4$ (4番目)で成り立つなら、 $n=5$ (5番目)でも成り立つ。……というように、まるで、ドミノ倒しのように次々と示していつてくれることになるわけなのです。だから、すべての自然数 n に対して①は成り立つのです。わかりますか？」

→何人かに聞いてみる

→わからないなら、どこが分からないかを聞いてそれに答える

「原理が分かれば、あとは慣れるだけです。では、教科書 112 ページの練習問題 38 の(1)を解いてみて下さい。基本は今やった問題と同じです。教科書を忘れた人のために黒板に問題を書いておくので、それを見て解いて下さい。」

板書：

P.112

練習 38(1) $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ ……①

を数学的帰納法によって、証明せよ。

→3~5分程時間をとり、質問がないか、見てまわる。

→答え合わせ(→生徒にあてて、黒板に書いてもらう)。

→わからない/途中まではできた とする。

「ありがとう、〇〇君。では、みんなで考えていきましょうか。

まず、 $n=1$ のとき成り立つかを考えるんですかね？ $n=1$ のとき①の左辺はどうなりますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応：1

「そうですね。 2^{n-1} だから、 $n=1$ を代入すると、 2^0 となるので、 $2^0 = 1$ になりますからね。同じように、右辺はどうなりますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $2^1 - 1$ で1になる。

「OKです。そうすると、 $n=1$ のとき、左辺=右辺となり、①が成り立ちますよね？これで $n=1$ のとき①が成り立つことが示せたわけです。」

板書：

[1] $n=1$ のとき (左辺) $= 2^0 = 1$ (右辺) $= 2^1 - 1 = 1$ よって(左辺)=(右辺)となり、①が成り立つ
--

「次に、 $n=k$ のとき成り立つと仮定しましょう。 $n=k$ を①に代入するとどうなりますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$

「そうですね。今答えてくれた式を②と名付けておきましょう。それでは、 $n=k+1$ のときにも①が成り立つということを示していきましょう。さっきの要領で、まず、 $n=k+1$ を①の左辺に代入します。代入するとどうなりますか？」

→生徒にあてる

生徒の反応： $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k$

「ありがとう。それではこれを変形していきましょう。」

→質問がないかどうか尋ねたりしておく。

『数学的帰納法』は何回も言うように、『一般的な法則などから、1つ1つの具体的な事実にあてはめて、推論・事実を導く方法』のことです。なぜ『数学的帰納法』が大事なのかというと、自然数というのは無限個あるので、有限個数えていても、きりがないので、一つひとつ数えなくても『すべての自然数について成り立つ』ということを行うために『数学的帰納法』が不可欠だからです。『数学的帰納法』は数列の分野だけじゃなくて、前回勉強した、『漸化式』や『関数』、理系の人は三年生になったときに『行列』で使うなど、結構広い範囲の分野で使います。数学だけではありません。『数学的帰納法』はその根本の原理、ドミノ倒しとかそういう話ですね、それが文理問わず、学問や仕事や日常などで幅広く生きてきます。だから、絶対に覚えておいてくださいね！

それでは、そろそろ時間がきましたので、今日の授業はここまでにします。残った練習問題 38 の(2)は各自やってきてください。次回はその答え合わせをして、今度は『数学的帰納法』で不等式を証明したり、漸化式から一般項を予想して、その予想が正しいということを証明したりします。今日勉強したところはしっかり復習しておいてくださいね。

それでは終わりませう。おつかれさまでした。」

→起立・礼(着席)をしておわり